
Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel V et $v \in V$ un vecteur non nul. On suppose que $f(5v) = -\lambda v$.

Parmi les affirmations suivantes, trouver celle qui est correcte.

1. ☐ $-\lambda v$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 5.
2. ☐ v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -5λ.
3. ☐ v n'est pas un vecteur propre de f sauf si $\lambda = 0$.
4. ☐ v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-\lambda/5$.

Exercice 2. Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ la matrice réelle

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ 1 & \cos^2(\beta) & \sin^2(\beta) \\ 1 & \cos^2(\gamma) & \sin^2(\gamma) \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Exercice 3. Trouver une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ mais $A^2 \neq 0$.

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ une matrice carrée inversible. Montrer que la transposée $A^\top$ est aussi inversible et

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$$

Remarque 1. La matrice $(A^\top)^{-1}$ s'appelle la matrice *contragrédiente* de la matrice A (mais cette terminologie s'utilise très peu et il n'est pas nécessaire de s'en souvenir).

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Quelle est la valeur de A^{10} ?

1. ☐ $A^{10} = \begin{pmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{pmatrix}$
2. ☐ $A^{10} = \begin{pmatrix} 2047 & -1022 \\ -2046 & 1023 \end{pmatrix}$
3. ☐ $A^{10} = \begin{pmatrix} 2046 & 2047 \\ 1023 & -1022 \end{pmatrix}$
4. ☐ $A^{10} = \begin{pmatrix} 2047 & 1023 \\ -2046 & -1022 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de V (c'est-à-dire une application linéaire $f : V \to V$), on note $f^2 = f \circ f$ et $f^m = f \circ f^{m-1}$ les puissances de f pour la composition.

1. Prouver que pour tout vecteur non nul $w_0 \in V$, il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tel que $f^m(w_0)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $w_0,\ w_1 = f(w_0), \dots, w_{m-1} = f^{m-1}(w_0)$.
2. Montrer que le sous-espace
$$W = \mathrm{Vect}\big(\{w_0,\ w_1, \dots, w_{m-1}\}\big)$$
engendré par les vecteurs $w_0, \dots, w_{m-1}$ vérifie $f(W) \subset W$ (on dit dans ce cas que le sous-espace W est *invariant* par f).
3. Montrer que $\{w_0,\ w_1, \dots, w_{m-1}\}$ est une base de W.
4. On note $w_m = a_0 w_0 + \cdots, +a_{m-1} w_{m-1}$ la combinaison linéaire donnée en (a). Écrire la matrice de la restriction $f|_W$ dans la base $w_0, \dots, w_{m-1}$.

Exercice 8.

1. Rappeler ce que signifie que deux matrices sont semblables.
2. Prouver que si deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors A^2 et B^2 sont aussi semblables.
3. Prouver que deux matrices semblables ont la même trace.
4. Que peut-on dire d'une matrice A qui est semblable à la matrice identité $I_n \in M_n(\mathbb{K})$?
5. Prouver que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.
6. Est-ce que deux matrices semblables ont nécessairement les mêmes vecteurs propres ?

Exercice 9. Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : V \to W$ une application.

Prouver soigneusement que f est linéaire si et seulement si son graphe

$$\Gamma = \{(x, y) \in V \times W \mid y = f(x)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $V \times W$ (on précisera la structure d'espace vectoriel sur $V \times W$).

Exercice 10. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V. Rappelons que f^m est l'endomorphisme $f^m = f \circ f \circ \cdots \circ f$ composé m fois.

On suppose qu'il existe un entier m tel que $\mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^m)$. Montrer qu'alors $\mathrm{Ker}(f^{m+k}) = \mathrm{Ker}(f^m)$ pour tout $k \geq 1$.

Suggestion : On peut commencer par prouver que si $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, alors $\mathrm{Ker}(f^3) = \mathrm{Ker}(f)$.

Remarque 2. L'énoncé de cet exercice joue un rôle important dans la théorie des formes normales de Jordan.